Devoir maison n$^{\text{o}}$ 3 : correction

Exercice 1. Application sur $\mathbb{R}_n[X]$ (*d'après CCINP TSI 2022*)
Le but de cet exercice est l'étude de l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ avec n un entier fixé non nul par :

$$\Phi\colon P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de somme d'entiers.
Dans la suite, un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ pourra être noté P ou $P(X)$.
Pour tout k entier non nul, on note Φ^k la composée k-ème de l'application Φ, *i.e.* $\Phi^k = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k \text{ fois}}$.

Par exemple, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Phi^2(P) = \Phi \circ \Phi(P) = \Phi\big(\Phi(P)\big)$.

Partie I - Préliminaires

Q1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- D'abord, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Clairement, $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$ est aussi un polynôme. Montrons qu'il est de degré inférieur ou égal à n. On a $\deg\big(P(X)\big) \leqslant n$ et $\deg\big(P(X+1)\big) \leqslant n$ donc

$$\deg\big(\Phi(P)\big) = \deg\big(P(X+1) - P(X)\big) \leqslant \max\{\deg\big(P(X+1)\big), \deg\big(P(X)\big)\big)\} \leqslant n.$$

Ainsi $\boxed{\Phi \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_n[X]}$.
- Soient P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X)\\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X)\\ &= \lambda\big[P(X+1) - P(X)\big] + \big[Q(X+1) - Q(X)\big]\\ &= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q),\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\Phi \text{ est linéaire}}$. Par conséquent, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q2. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. L'application Φ est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i = X^i$. Alors, en utilisant la définition de Φ, on a

$$\begin{aligned}&\Phi(P_0)(X) = 1 - 1 = 0,\\ &\Phi(P_1)(X) = (X+1) - X = 1,\\ &\Phi(P_2)(X) = (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2X + 1,\\ &\Phi(P_3)(X) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas inversible car elle contient une colonne nulle donc $\boxed{\Phi \text{ n'est pas un automorphisme de } \mathbb{R}_3[X]}$.

Q3. Montrer que, pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k - 1$.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré k. On écrit $P(X) = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$ avec $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ et $a_k \neq 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\Phi(P) &= \Phi\left(\sum_{j=0}^{k} a_j X^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j \Phi(X^j) && \textit{Φ est linéaire} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j \left[(X+1)^j - X^j\right] && \textit{définition de Φ} \\
&= \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i. && \textit{par binôme Newton et termes en X^j se simplifient}
\end{aligned}$$

La plus grande puissance de X apparaissant dans cette somme est pour $i = j-1$ lorsque $j = k$, et elle vaut $a_k \binom{k}{k-1} X^{k-1} = k a_k X^{k-1}$. Comme $a_k \neq 0$ et $k \geqslant 1$, on a $k a_k \neq 0$, d'où $\boxed{\deg(\Phi(P)) = k-1}$.

Q4. Calculer le noyau de Φ.

D'après la question précédente, si P est de degré $k \geqslant 1$ alors $\Phi(P)$ est de degré $k-1 \geqslant 0$ et en particulier $\Phi(P) \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ (rappelons que le polynôme nul est de degré $-\infty$). Ainsi seuls les polynômes constants peuvent être dans le noyau de Φ, *i.e.* $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$.

Réciproquement, soit P un polynôme constant égal à $a \in \mathbb{R}$. On a $\Phi(P) = a - a = 0$ donc $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Ainsi $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]}$.

Q5. Déterminer l'image de Φ.

D'après **Q3**, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$. Or d'après la question précédente, $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = 1$ donc nécessairement $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = n$.

Finalement, comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$, on obtient $\boxed{\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Partie II - Une famille de polynômes

Dans cette partie, on considère la famille $(H_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $H_0 = P_0$ le polynôme constant égal à 1 et pour chaque entier i non nul,

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-i+1)}{i!} = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Q6. Prouver que $(H_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, H_i est bien un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et on a $\deg(H_i) = i$. La famille $(H_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est donc échelonnée en degré donc libre.

De plus elle contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc il s'agit $\boxed{\text{d'une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q7. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $H_i(0) = 0$ et $\Phi(H_i) = H_{i-1}$.

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$.

- D'abord, on remarque qu'il a X en facteur dans H_i donc nécessairement $\boxed{H_i(0)=0}$.
- En commençant par utiliser la définition de Φ, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(H_i) &= H_i(X+1) - H_i(X) && \textit{définition } H_i \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X+1-k) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) && \textit{on pose } j=k-1 \textit{ dans le } 1^{er} \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{j=-1}^{i-2}(X-j) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) && \textit{mise en facteur} \\
&= \left(\frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k)\right)\Big[\underbrace{X+1}_{j=-1} - \big(\underbrace{X-(i-1)}_{k=i-1}\big)\Big] && \textit{le crochet vaut } i \\
&= \frac{1}{(i-1)!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) && \textit{définition } H_{i-1} \\
&= \boxed{H_{i-1}}.
\end{aligned}$$

Q8. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$.

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. D'après la relation précédente, on a $\Phi^i(H_i) = \Phi^{i-1}(H_{i-1})$. En itérant le procédé (on pourrait rédiger une récurrence), il vient $\boxed{\Phi^i(H_i) = \Phi^0(H_0) = H_0 = 1}$.

Q9. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$ avec a_k réel pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

Montrer que $P(0) = a_0$ et que pour ℓ un entier fixé entre 1 et n, $a_\ell = \Phi^\ell(P)(0)$.

- D'abord, d'après le premier point de **Q7**, pour tout $k \geqslant 1$, $H_k(0) = 0$. Ainsi $P(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k H_k(0) =$ $a_0 H_0(0) = \boxed{a_0}$ puisque H_0 est le polynôme constant égal à 1.
- Soit $\ell \in [\![1\,;n]\!]$. Commençons par remarquer que d'après les deux questions précédentes, comme les constantes sont dans le noyau de Φ, on a $\Phi^j(H_k) = 0$ dès que $j > k$. Alors, en commençant par la linéarité de Φ :

$$\begin{aligned}
\Phi^\ell(P)(0) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi^\ell(H_k)(0) && \textit{remarque ci-dessus et } \textbf{\textit{Q7}} \\
&= \sum_{k=\ell}^{n} a_k H_{k-\ell}(0) && \textit{changement indice } j=k-\ell \\
&= \sum_{j=0}^{n-\ell} a_{j+\ell} H_j(0) && \textit{même raisonnement que pour } a_0 \\
&= \boxed{a_\ell}.
\end{aligned}$$

Q10. En déduire que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'abord, d'après **Q6**, $(H_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on peut donc écrire $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$ avec $a_0, \ldots, a_n$ des réels. Alors, en utilisant la question précédente et en remarquant que

$a_0 = P(0) = \Phi^0(P)(0)$, on obtient $\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X)}$.
Enfin, cette écriture est bien unique par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base donnée.

Partie III - Application à des calculs de sommes

Q11. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0)$.

Comme $P = \Phi(Q)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(i) &= \sum_{i=0}^{n} \Phi(Q)(i) && \textit{définition } \Phi \\ &= \sum_{i=0}^{n} Q(i+1) - Q(i) && \textit{somme télescopique} \\ &= \boxed{Q(n+1) - Q(0)}.\end{aligned}$$

Q12. En remarquant que $H_1(X) = X$ et à l'aide de **Q7** et **Q11**, montrer que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par définition de H_1, on a $X = H_1 \overset{\textbf{Q7}}{=} \Phi(H_2)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} H_1(k) \overset{\textbf{Q11}}{=} H_2(n+1) - H_2(0) = \frac{(n+1)n}{2!} - 0 = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Q13. Exprimer X^2 dans la base $(H_i)_{i \in [\![0;n]\!]}$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- On a $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et $H_2 = \frac{X(X-1)}{2}$ donc $\boxed{X^2 = 2H_2 + H_1}$.
- On raisonne comme dans **Q12**. D'après la question précédente, **Q7** et la linéarité de Φ, $X^2 = \Phi(Q)$ où $Q = \phi(H_1 + 2H_2) = H_2 + 2H_3$. D'après **Q11**, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= [H_2(n+1) + 2H_3(n+1)] - [H_2(0) + 2H_3(0)] \\ &= \frac{(n+1)n}{2!} + 2\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} - 0 \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \textit{(faire le calcul).}\end{aligned}$$

Exercice 2. ★ Suite des noyaux et des images itérés
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Q14. Montrer que la suite $\left(\operatorname{Ker}(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. Ensuite, montrer que si pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k+1})$, alors $\operatorname{Ker}(u^{k+1}) = \operatorname{Ker}(u^{k+2})$.

• Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \operatorname{Ker}(u^k)$, *i.e.* $u^k(x) = 0_E$. Alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u^{k+1})$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(u^k) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1})$ et $\boxed{\text{la suite } \left(\operatorname{Ker}(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker}(u^k) = \operatorname{Ker}(u^{k+1})$. D'après le point précédent, on a $\operatorname{Ker}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+2})$. Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^{k+2})$. Alors $0_E = u^{k+2}(x) = u^{k+1}(u(x))$, *i.e.* $u(x) \in \operatorname{Ker}(u^{k+1}) = \operatorname{Ker}(u^k)$. En particulier, $u^k(u(x)) = u^{k+1}(x) = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Ker}(u^{k+1})$, d'où $\operatorname{Ker}(u^{k+2}) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1})$, ce qui conclut.

Q15. Montrer qu'il existe un rang $p \leqslant n$ tel que la suite $\left(\operatorname{Ker}(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante jusqu'au rang p puis constante à partir du rang p.

• Tout d'abord, par récurrence immédiate avec le résultat précédent, si pour un certain $p \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(u^p) = \operatorname{Ker}(u^{p+1})$, alors $\boxed{\text{pour tout } \ell \geqslant p,\ \operatorname{Ker}(u^\ell) = \operatorname{Ker}(u^{\ell+1})}$. Cherchons donc à montrer l'existence d'un tel entier p.

• Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $d_k = \dim(\operatorname{Ker}(u^k))$. D'après la question précédente, la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est naturellement majorée par $n = \dim(E)$, elle est convergente.
Or on montre « classiquement » qu'une suite strictement croissante d'entiers ne peut pas converger [1].
On en déduit que la suite (d_k) est croissante mais pas strictement croissante. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$, tel que $d_p = d_{p+1}$, d'où $\operatorname{Ker}(u^p) = \operatorname{Ker}(u^{p+1})$ (une inclusion d'après la question précédente + égalité des dimensions).
Comme toute partie non vite de $\mathbb{N}$ admet un minimum, on peut même supposer que p est le plus petit entier vérifiant cette propriété. Remarquons que $p \leqslant n$ par majoration des d_k par n et croissance stricte des entiers $(d_0, \dots, d_p)$. Alors, par minimalité de p, la suite $(\operatorname{Ker}(u^k))$ est strictement croissante jusqu'au rang p puis, d'après le premier point, elle devient constante.

Q16. Montrer que la suite $\left(\operatorname{Im}(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante jusqu'au rang p défini à la question précédente, puis constante à partir de ce rang p.

• Tout d'abord, si $y \in \operatorname{Im}(u^{k+1})$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x) = u^k(u(x))$ donc $y \in \operatorname{Im}(u^k)$. La suite $\left(\operatorname{Im}(u^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
• Ensuite, grâce à ces inclusions toujours vraies, on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Im}(u^{k+1}) = \operatorname{Im}(u^k) && \text{\textit{dimension}} \\
\iff & \operatorname{rg}(u^{k+1}) = \operatorname{rg}(u^k) && \text{\textit{théorème du rang}} \\
\iff & \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(u^{k+1})) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(u^k)) && \\
\iff & \dim(\operatorname{Ker}(u^{k+1})) = \dim(\operatorname{Ker}(u^k)) && \text{\textit{inclusion de Q14 + égalité dimensions}} \\
\iff & \operatorname{Ker}(u^{k+1}) = \operatorname{Ker}(u^k) && \text{\textit{question précédente}} \\
\iff & k \geqslant p,
\end{aligned}
$$

d'où $\boxed{\text{la stricte décroissance jusqu'au rang } p \text{ et la constance ensuite}}$.

Q17. En considérant l'application linéaire induite par u entre deux sous-espaces vectoriels bien choisis, montrer que les suites $\left(\dim(\operatorname{Ker}(u^{k+1})) - \dim(\operatorname{Ker}(u^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{rg}(u^k) - \operatorname{rg}(u^{k+1})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes.

1. Si (u_n) est une suite d'entiers strictement croissante, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ et $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{N}$, d'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 1$ car 1 est le plus petit entier strictement positif. Par récurrence immédiate on obtient $u_n \geqslant u_0 + n$ et on conclut par comparaison.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Considérons l'application $\phi_k : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(u^k) & \to & \mathrm{Im}(u^{k+1}) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$.

On vérifie que cette application est :

– bien définie : si $x \in \mathrm{Im}(u^k)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^k(y)$. Alors $\phi_k(x) = u(x) = u(u^k(y)) = u^{k+1}(y) \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$.
– surjective : si $y \in \mathrm{Im}(u^{k+1})$, $y = u^{k+1}(x)$ pour un $x \in E$. Alors, en notant $z = u^k(x) \in \mathrm{Im}(u^k)$, on a $y = u(u^k(x)) = u(z) = \phi_k(z)$.

Alors, d'après le théorème du rang pour ϕ_k, on a $\dim(\mathrm{Im}(\phi_k)) + \dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)) = \mathrm{rg}(u^k)$, *i.e.*

$$\mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1}) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)) \qquad (\diamondsuit).$$

Enfin, on a

$$\mathrm{Ker}(\phi_k) = \{x \in \mathrm{Im}(u^k) \mid \phi_k(x) = u(x) = 0_E\} = \mathrm{Im}(u^k) \cap \mathrm{Ker}(u).$$

Par décroissance de la suite $(\mathrm{Im}(u^k))$ (**Q16**), la suite $(\mathrm{Ker}(\phi_k))$ est décroissante, c'est donc aussi le cas pour la suite $(\dim(\mathrm{Ker}(\phi_k)))$.

Par $(\diamondsuit)$, on obtient que $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1})) \text{ est décroissante}}$. Grâce au théorème du rang, on obtient l'autre résultat.

Remarque : autrement dit, la suite des noyaux itérés croît, celles des images itérées décroît, mais les deux le font de moins en moins vite jusqu'à devenir stationnaires.

Q18. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$ où p est l'entier défini en **Q15**.

D'abord, d'après le théorème du rang pour u^p, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u^p)) + \dim(\mathrm{Im}(u^p)) = \dim(E)$.

Montrons que ces deux sous-espaces sont en somme directe. Soit $y \in \mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$. On a $u^p(y) = 0_E$ et $y = u^p(x)$ pour un $x \in E$. Ainsi $u^{2p}(x) = u^p(u^p(x)) = u^p(y) = 0_E$, *i.e.* $x \in \mathrm{Ker}(u^{2p})$. Or, d'après **Q15**, $\mathrm{Ker}(u^{2p}) = \mathrm{Ker}(u^p)$. Par conséquent, $y = u^p(x) = 0_E$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0_E\}$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{Ker}(u^p) \text{ et } \mathrm{Im}(u^p) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

Q19. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où N est une matrice carrée nilpotente et C une matrice carrée inversible.

• Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé. D'après la question précédente, on a $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(v^p) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$.

D'après le cours, $\mathrm{Ker}(v^p)$ est stable par v. De plus, l'endomorphisme induit par v sur $\mathrm{Ker}(v^p)$ est nilpotent (d'indice au plus p, par définition de $\mathrm{Ker}(v^p)$).

• De façon analogue[2], $\mathrm{Im}(v^p)$ est stable par v. Notons maintenant w l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(v^p)$ induit par v.

Soit $y \in \mathrm{Im}(v^p)$. Par **Q16**, on a $\mathrm{Im}(v^p) = \mathrm{Im}(v^{p+1})$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = v^{p+1}(z)$. Ainsi le vecteur $x = v^p(z) \in \mathrm{Im}(v^p)$ vérifie $y = v(x) = w(x)$. Autrement dit, w est surjectif et, comme $\mathrm{Im}(v^p)$ est de dimension finie, il s'agit d'un automorphisme de $\mathrm{Im}(v^p)$.

• Finalement, en notant $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(v^p) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs, le premier bloc diagonal est une matrice nilpotente et le second une matrice inversible, CQFD.

Q20. *Et en dimension infinie ?*
On considère l'endomorphisme de dérivation $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

2. Ce n'est pas tout à fait un résultat de cours mais c'est très simple : si $y \in \mathrm{Im}(v^p)$, $y = v^p(x)$ pour un $x \in E$. Alors $v(y) = v^{p+1}(x) = v^p(v(x)) \in \mathrm{Im}(v^p)$.

a) Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(D^k))$ est strictement croissante mais ne devient pas constante à partir d'un certain rang.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(D^n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subsetneq \mathbb{K}_n[X]$, $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{Ker}(D^n)) \text{ est strictement croissante}}$ et en particulier elle ne devient jamais constante.

b) Montrer qu'il n'existe pas deux sous-espaces vectoriels N et I de $\mathbb{K}[X]$, stables par u, tels que $\mathbb{K}[X] = N \oplus I$ avec l'endomorphisme induit par u sur N (respectivement sur I) nilpotent (resp. inversible).

Supposons par l'absurde qu'une telle décomposition existe.

- Montrons d'abord que $I = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. Notons D_I l'endomorphisme induit par D sur I. Soient $P \in I$ et $k > \deg(P)$. Alors $D_I^k(P) = D^k(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Mais par définition D_I est inversible donc toutes ses puissances également, ce qui implique que $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
- D'après le point précédent, on a nécessairement $N = \mathbb{K}[X]$ donc D est nilpotent. Or ceci est clairement faux car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k(X^k) = k! \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $D^k \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{K}[X])}$.

Remarque : en fait, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (il suffit de prendre $n = \deg(P) + 1$), mais il n'existe pas un n général fonctionnant pour tout polynôme P à cause de la dimension infinie.